1) a) $f: G \longrightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun. $\forall N \trianglelefteq H$ için $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim.

$f^{-1}(N) = \{a \in G \mid f(a) \in N\}$ olduğunu biliyoruz. Öncelikle

$f^{-1}(N) \leq G$ old. gösterelim.

• $f^{-1}(N) \neq \emptyset$: G bir grup olduğundan $e_G \in G$ ve $f(e_G) = e_H \in H$ dır.

$N \leq H \Rightarrow e_H \in N \Rightarrow f(e_G) \in N$ old. $e_G \in f^{-1}(N) \Rightarrow f^{-1}(N) \neq \emptyset$

• $f^{-1}(N) \subseteq G$ old. tanımdan açıktır.

• $\forall a, b \in f^{-1}(N) \Rightarrow f(a), f(b) \in N$

$$\overset{N \leq H}{\Longrightarrow} f(a).(f(b))^{-1} \in N$$

$$\overset{f \text{ homom.}}{\Longrightarrow} f(a) f(b^{-1}) \in N$$

$$\overset{f \text{ homom.}}{\Longrightarrow} f(ab^{-1}) \in N$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(N) \quad \text{olup} \quad f^{-1}(N) \leq G$$

Şimdi de $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$ old. gösterelim.

$\forall g \in G \quad \forall a \in f^{-1}(N)$ için $gag^{-1} \in f^{-1}(N)$ old. göstermeliyiz.

$$f(gag^{-1}) = f(g) f(a) f(g^{-1})$$

$$= \underbrace{f(g)}_{\in H} \underbrace{f(a)}_{\in N} \underbrace{(f(g))^{-1}}_{\in H} \in N \quad (N \trianglelefteq H)$$

$f(gag^{-1}) \in N \Rightarrow gag^{-1} \in f^{-1}(N)$ olup $f^{-1}(N) \trianglelefteq G$ dir.

b) $N \lhd G$, $\forall aN, bN \in G/N$ için $(aN)(bN) = (ab)N$ olduğunu gösterelim.

$N \trianglelefteq G \Rightarrow \forall a \in G$ için $aN = Na$ dır. $(aN).(bN)$'nin keyfi bir elemanı, $x_1, x_2 \in N$ olmak üzere $(ax_1)(bx_2) = \cancel{a(x_1b)x_2} = a(x_1b)x_2$ şeklindedir. $x_1 b \in Nb = bN \Rightarrow x_1 b = bx$ o.ş. $x \in N$ vardır.

$$(ax_1)(bx_2) = a(x_1b)x_2 = a(bx)x_2 = (ab)x x_2 \in (ab)N$$

olup $(aN)(bN) \subseteq (ab)N$ --- (1) ---

Şimdi de keyfi bir $(ab)x \in (ab)N$, $(x \in N)$ alalım.

$\forall y \in N$ için $(ab)x = a(yy^{-1})(bx) = (ay)(y^{-1}b)x$ ve

$y^{-1}b \in Nb = bN \Rightarrow y^{-1}b = bx_1$ o.ş. $x_1 \in N$ vardır

O halde $(ab)x = (ay)(bx_1)x = (ay)(bx_1x) \in (aN)(bN)$

olup $(ab)N \subseteq (aN)(bN)$ --- (2) ---

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir.

2) Her $a \in G$ için $\psi(a) = \varphi_a$ ile tanımlı $\psi : G \to I(G)$ fonksiyonunun öncelikle bir grup homomorfizması olduğunu gösterelim. $\forall a,b \in G$ için

$\psi(ab) = \varphi_{ab}$ olup $\forall x \in G$ için $\varphi_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1}$

$$= abxb^{-1}a^{-1}$$
$$= a(bxb^{-1})a^{-1}$$
$$= \varphi_a(\varphi_b(x))$$
$$= (\varphi_a \circ \varphi_b)(x)$$

olduğundan $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab}$ yazılır. O halde

$\psi(ab) = \varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b = \psi(a) \circ \psi(b)$ olup ψ homomorfizmadır.

M merkez olmak üzere Çek $\psi = M$ old. gösterelim.

Keyfi bir $a \in$ Çek ψ alalım.

$$a \in \text{Çek}\,\psi \iff \psi(a) = \varphi_a = \varphi_e$$
$$\iff \forall x \in G,\ \varphi_a(x) = \varphi_e(x)$$
$$\iff \forall x \in G\quad axa^{-1} = exe^{-1} = x$$
$$\iff \forall x \in G\quad ax = xa$$
$$\iff a \in M$$

Çek $\psi = M$ bulunur.

1. İzomorfizma teoremine göre

$$G/\text{Çek}\,\psi \cong \psi(G) \text{ olur}$$

Ayrıca iç otomorfizma tanımından $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ olup $\forall y \in G$ için $\varphi_a(x) = y$ o.ş. $\exists x \in G$ bulunabilir. Yani φ_a örtendir. O halde ψ de örten olur.

1. izomorfizma teoreminden

$$G/M \cong I(G) \text{ elde edilir}$$

3) a) Bir grubun devirli olması için elemanın mertebesi grubun mertebesine eşit olan bir eleman bulmalıyız.

$\mathbb{Z}_{15}^* = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$ olup grubun mertebesi 8 dir.

O halde mertebesi 8 olan bir eleman bulunursa grup devirlidir. Aksi halde devirli değildir.

$1^1=1$, $o(1)=1$

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=1$, $o(2)=4$

$4^1=4$, $4^2=1$, $o(4)=2$

$7^1=7$, $7^2=4$, $7^3=13$, $7^4=1$, $o(7)=4$

$8^1=8$, $8^2=4$, $8^3=2$, $8^4=1$, $o(8)=4$

$11^1=11$, $11^2=1$, $o(11)=2$

$13^1=13$, $13^2=4$, $13^3=7$, $13^4=1$, $o(13)=4$

$14^1=14$, $14^2=1$, $o(14)=2$

$\mathbb{Z}_{15}^*$ grubunun bütün elemanlarının mertebesi <8 dir. Mertebesi 8 olan bir elemanı bulunamadığından $\mathbb{Z}_{15}^*$ devirli değildir.

b) $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ olsun. $HK \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim.

Bunun için öncelikle $HK \leq G$ old. göstermeliyiz. $HK=KH$ old. gösterirsek $HK \leq G$ dir. İlgili teoreme göre

$K \trianglelefteq G$ old. $\forall k \in K \Rightarrow k \in G$

$H \trianglelefteq G \Rightarrow \forall a \in G$ için $aH = Ha$ olup

$\Rightarrow kH = Hk \Rightarrow HK = KH$ olup $HK \leq G$ dir.

Şimdi de $HK \trianglelefteq G$ olduğunu gösterelim.

$\forall g \in G$ $\forall hk \in HK$ için $g(hk)g^{-1} = (gh)(g^{-1}g)(kg^{-1}) \overset{H \trianglelefteq G,\ K \trianglelefteq G}{=} \underbrace{(ghg^{-1})}_{\in H} . \underbrace{(gkg^{-1})}_{\in K} \in HK$

olup $HK \trianglelefteq G$ dir.

4) a)
$$x \equiv 2\ (5)$$
$$x \equiv 3\ (8)$$
$$x \equiv 5\ (9)$$
kongrüans sisteminin Çin Kalan Teoremine göre $(5,8)=1$, $(5,9)=1$, $(8,9)=1$ olduğundan bir tek çözümü vardır.

$M_1 = 8.9 = 72$
$M_2 = 5.9 = 45$
$M_3 = 5.8 = 40$

$M_i b_i \equiv 1 (m_i)$ olduğundan $M_1 b_1 \equiv 1 (m_1)$, $M_2 b_2 \equiv 1 (m_2)$

$\Rightarrow 72 b_1 \equiv 1\ (5)$, $\Rightarrow 45 b_2 \equiv 1\ (8)$

$\Rightarrow 2 b_1 \equiv 1\ (5)$, $\Rightarrow 5 b_2 \equiv 1\ (8)$

$\Rightarrow b_1 \equiv 3\ (5)$, $\Rightarrow b_2 \equiv 5 (8)$

$M_3 b_3 \equiv 1 (m_3)$

$\Rightarrow 40 b_3 \equiv 1\ (9)$

$\Rightarrow 4 b_3 \equiv 1\ (9)$

$\Rightarrow b_3 \equiv 7\ (9)$

bulunur. O halde

$$x \equiv \sum_{i=1}^{3} M_i b_i a_i \ (\text{mod } 5.8.9)$$

$x \equiv M_1 b_1 a_1 + M_2 b_2 a_2 + M_3 b_3 a_3$ (mod 360)

$x \equiv 72.3.2 + 45.5.3 + 40.7.5$ (mod 360)

$x \equiv 347\ (360)$

4) b) $f: K \longrightarrow L$ ve $g: L \longrightarrow M$ herhangi iki homomorfizma olsun. Bu durumda $gof: K \longrightarrow M$ tanımlıdır. Şimdi gof'un da bir homomorfizma olduğunu gösterelim.

$\forall a,b \in K$ için
$$\begin{aligned} gof(ab) &= g(f(ab)) \\ &= g(f(a)f(b)) \\ &= g(f(a)) \cdot g(f(b)) \\ &= (gof)(a) \cdot (gof)(b) \end{aligned}$$
olup

gof homomorfizmadır.

5) Öncelikle α ve β yı ayrık devirlerine ayıralım.

$\alpha = (1\,3\,4\,5)(2\,8\,6\,7)$, $\beta = (1\,3\,5\,4\,8\,2)(6\,7)$

bulunur.

a) $o(\alpha) = \text{okek}(4,4) = 4$

$o(\beta) = \text{okek}(6,2) = 6$

b) α ve β'nın uzunlukları farklı olduğundan $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$ olacak şekilde bir γ bulunamaz.

c) $M(\beta) = \{ g \in S_8 \mid g\beta g^{-1} = \beta \}$

$$\begin{aligned} g\beta g^{-1} = \beta \Rightarrow (g(1)\,g(3)\,g(5)\,g(4)\,g(8)\,g(2))(g(6)\,g(7)) &= (1\,3\,5\,4\,8\,2)(6\,7) \\ &= (1\,3\,5\,4\,8\,2)(7\,6) \\ &= (3\,5\,4\,8\,2\,1)(6\,7) \\ &= (3\,5\,4\,8\,2\,1)(7\,6) \\ &= (5\,4\,8\,2\,1\,3)(6\,7) \\ &= (5\,4\,8\,2\,1\,3)(7\,6) \\ &= (4\,8\,2\,1\,3\,5)(6\,7) \\ &= (4\,8\,2\,1\,3\,5)(7\,6) \\ &= (8\,2\,1\,3\,5\,4)(6\,7) \\ &= (8\,2\,1\,3\,5\,4)(7\,6) \\ &= (2\,1\,3\,5\,4\,8)(6\,7) \\ &= (2\,1\,3\,5\,4\,8)(7\,6) \end{aligned}$$

$M(\beta) = \{ I, (6\,7), (1\,3\,5\,4\,8\,2), (1\,3\,5\,4\,8\,2)(6\,7), (1\,5\,8)(2\,3\,4), (1\,5\,8)(2\,3\,4)(6\,7), (1\,4)(2\,5)(3\,8), (1\,4)(2\,5)(3\,8)(6\,7), (1\,8\,5)(2\,4\,3), (1\,8\,5)(2\,4\,3)(6\,7), (1\,2\,8\,4\,5\,3), (1\,2\,8\,4\,5\,3)(6\,7) \}$ şeklindeki gibi elde edilir.

Yani 12 elemanlı $M(\beta)$ şekildeki gibi elde edilir.